MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Options M, P et TA

NOTATIONS

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels, $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des réels positifs, $\mathbb{R}^{+*}$ est l'ensemble des réels strictement positifs.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

On notera (u_n) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général u_n d'éléments de $\mathbb{R}$.

1ère Partie

Soit f une application de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions suivantes. f est continûment dérivable, f' est décroissante et $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Pour tout x dans $\mathbb{R}^{+*}$, on pose :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt.$$

Soit (x_n) une suite strictement croissante non bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} (-1)^p f'(x_p).$$

---

1 - a - Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

b - Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Soient x, y deux réels distincts strictement positifs.

2 - a - Montrer qu'il existe une constante A, telle que l'application G de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$G(z) = F(z) - F(x) - (z-x)\,f(x) - \frac{(z-x)^2}{2}\,A,$$

s'annule pour z = y.

b - En déduire qu'il existe c strictement compris entre x et y, tel que $A = f'(c)$.

3 - a - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe y_n dans l'intervalle $]n, n+\frac{1}{2}[$, tel que :

$$F(n+\frac{1}{2}) - F(n) = \frac{1}{2} f(n) + \frac{1}{8} f'(y_n).$$

b - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe z_n dans l'intervalle $]n+\frac{1}{2}, n+1[$, tel que :

$$-F(n+\frac{1}{2}) + F(n+1) = \frac{1}{2} f(n+1) - \frac{1}{8} f'(z_n).$$

Pour tout $n \geq 2$, on pose :

$$U_n(f) = \frac{1}{2} f(1) + \sum_{p=2}^{n-1} f(p) + \frac{1}{2} f(n) - F(n).$$

4 - a - Montrer que la suite $(U_n(f))$ est convergente.
On notera U (f) sa limite.

b - Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a :

$$0 \leq U_n(f) - U(f) \leq \frac{1}{8} f'(n).$$

---

5 - a - En considérant l'application $f_1 : x \mapsto -\frac{1}{x}$, montrer l'existence d'une constante γ, telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n) \right) = \gamma.$$

b - Donner un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{1}{n}$ de :

$$\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n) \right).$$

---

6 - a - En considérant l'application $f_2 : x \mapsto \ln(x)$, montrer l'existence d'une constante β, telle que :

$$0 \leq \ln(n!) - (n+\frac{1}{2}) \ln(n) + n - 1 + \beta \leq \frac{1}{8n}.$$

b - En déduire que :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{1-\beta} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

2ème Partie

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p(t)\, dt.$$

1 - a - Montrer que pour tout $p > 1$, on a :

$$p I_p = (p-1) I_{p-2}.$$

b - Montrer que la suite (I_p) est décroissante et positive.

c - En déduire que la suite (I_p) est convergente et vérifie :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{I_{p-1}}{I_p} = 1.$$

2 - a - Exprimer I_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

b - En déduire que $1-\beta = \ln(\sqrt{2\pi})$.

3 - Montrer que :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}, \quad I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Pour tout x dans l'intervalle $]-1,1[$, on pose :

$$J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-x\cos(t)}\, dt.$$

4 - Calculer J (x).

5 - Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} I_n x^n$?

Pour x dans l'intervalle $]-R, R[$, on note :

$$I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n.$$

6 - a - De la question de la 2ème partie (1 - a), montrer que I satisfait l'équation différentielle :

$$(1-x^2)\,y' - x\,y = 1.$$

b - Comparer I (x) et J(x).

3ème Partie

1 - a - Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$1 + t \leq e^t, \quad 1 - t \leq e^{-t}.$$

b - En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $0 \leq t \leq n$, on a :

$$(1-\frac{t}{n})^n \leq e^{-t} \leq (1+\frac{t}{n})^{-n},$$

$$0 \leq e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n \leq e^{-t}\,(1-(1-\frac{t^2}{n^2})^n),$$

$$0 \leq e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n \leq \frac{t^2}{n}\, e^{-t}.$$

2 - Montrer que les intégrales

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

sont convergentes.

3 - a - Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt.$$

b - Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{(1-\frac{t}{n})^n}{t}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

4 - a - Montrer que :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}\,dt.$$

b - En déduire que :

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left[\int_0^1 \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t}\,dt - \int_1^n \frac{(1-\frac{t}{n})^n}{t}\,dt \right].$$

5 - En déduire que :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt.$$

6 - Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{t^2}{n})^n\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

7 - a - Montrer que :

$$I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{t^2}{n})^n\,dt.$$

b - En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4ème Partie

L'objet de cette partie est de donner des équivalents de suites définies par une relation de récurrence.

On considère la suite b_n définie par :

$$b_0 = 0,\ b_1 = 1,\ b_n = \sum_{p=1}^{n-1} b_p b_{n-p},\ \text{si } n \geq 2.$$

On considère la série entière de terme général $b_n x^n$. A l'intérieur du disque de convergence, on note :

$$b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

1 - Montrer qu'à l'intérieur du disque de convergence de la série entière, on a :

$$b^2(x) - b(x) + x = 0.$$

2 - En déduire l'expression de b(x) et donner l'intervalle de convergence dans $\mathbb{R}$ de son développement en série entière au voisinage de 0.

3 - a - Calculer b_n pour tout n et l'exprimer en fonction de $I_{2(n-1)}$.

b - Donner un équivalent de b_n.

On considère la suite g_n définie par :

$$g_0 = 1,\ g_1 = g_2 = 0,\ n g_n = (n-1) g_{n-1} + \frac{1}{2} g_{n-3},\ \text{pour } n \geq 3.$$

4 - a - Montrer que la suite $(n g_n)$ est positive et croissante.

b - En déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{g_{n+1}}{g_n} = 1.$$

5 - Montrer que le rayon de convergence de la série entière de terme général $g_n x^n$ est 1.

Pour tout x dans l'intervalle $]-1,1[$, on pose :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n x^n.$$

6 - a - Montrer que g satisfait une équation différentielle linéaire du premier ordre.

b - En déduire que pour tout x dans l'intervalle $]-1,1[$, on a :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, e^{-\frac{x^2+2x}{4}}$$

Au voisinage de 0, on considère les séries entières :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\qquad e^{-\frac{x^2+2x}{4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n x^n.$$

7 - a - Trouver le rayon de convergence de chaque série.

b - Donner un équivalent de a_n lorsque $n \to +\infty$.

c - Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1.$$

8 - Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} e_p \left(\frac{a_{n-p}}{a_n} - 1 \right) = 0.$$

9 - a - En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g_n}{a_n} = e^{-\frac{3}{4}}.$$

b - Donner un équivalent de g_n lorsque $n \to +\infty$.